ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES

OPTION MATHEMATIQUES

Juin 1998

TROISIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée: 2 heures)
3 pages

Les trois premières parties sont très largement indépendantes. Les candidats pourront admettre un résultat qu'ils n'auraient pas démontré à condition de le préciser explicitement.

Il sera tenu le plus grand compte de la rigueur et de la clarté du raisonnement.

Dans tout le problème a et b désignent deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$, de classe C^1 (c'est à dire dérivable sur $[a,b]$ et de dérivée continue).

Question Préliminaire :

Justifier l'existence de $\sup_{y\in[a,b]} |f'(y)|$, que l'on notera K dans la suite du problème, et montrer que $\forall x, x' \in [a,b]$, $|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$. (On invoquera de façon précise les théorèmes du cours utilisés).

On supposera dans toute la suite du problème que $K < 1$

Première Partie : Théorème du Point Fixe.

1) Montrer qu'il existe un et un seul $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$ et que l'itération définie par : $x_0 \in [a,b]$; $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers c.

2) On définit l'erreur à la $n^{ième}$ itération par : $e_n = x_n - c$. Montrer que :

$$|e_n| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0|$$

Seconde Partie : Procédure Diagonale d'Aitken.

On suppose **dans toute la suite du problème** que $\forall x \in [a,b]$, $|f'(x)| > 0$.

1) Montrer que si $e_0 \neq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n \neq 0$. Que peut on dire si $e_0 = 0$? On supposera, dans la suite de cette partie, que $e_0 \neq 0$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n \neq 0$.

3) Montrer que $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ tend vers $f'(c)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) Pour tout entier n, on pose :

$$x'_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

Justifier l'existence de x'_n et montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x'_n - c}{x_n - c} = 0$$

Commenter ce résultat.

Troisième Partie : Méthode de Steffenson.

Dans cette partie, g est une fonction de $[a, +\infty[$ dans $[a, +\infty[$, de classe C^1, telle que g' est croissante et strictement négative. On notera :

$$N(x) = g(g(x)) - 2g(x) + x$$

1) Montrer qu'il existe un et un seul $d \in [a, +\infty[$ tel que $g(d) = d$.

2) Soit $x \in [a, +\infty[$. Montrer qu'il existe y_1 et y_2 dans $[a, +\infty[$ tels que :

$$g(x) - x = (g'(y_1) - 1)(x - d) \qquad \text{et}$$
$$N(x) = \left[(g'(y_1) - 1)^2 + (g'(y_2) - g'(y_1))\, g'(y_1)\right](x - d)$$

3) Montrer que $N(x) = 0$ si et seulement si $x = d$.

4) On pose, pour $x \in [a, +\infty[$,

$$G(x) = \begin{cases} x - \frac{(g(x)-x)^2}{N(x)} \text{ si } x \neq d \\ d \text{ si } x = d. \end{cases}$$

Montrer que G est une fonction continue de $[a, +\infty[$ dans $[a, +\infty[$.

5) On définit la suite $(x''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par: $x''_0 \in [a, +\infty[$ et $x''_{n+1} = G(x''_n)$. Montrer que cette suite converge vers d.

Quatrième Partie : Application.

On cherche à estimer numériquement la solution de l'équation $\exp(-x) = x$.

Montrer que l'on peut mettre en oeuvre les trois algorithmes étudiés dans le problème.

En prenant $x_0 = x''_0 = 0,5$ calculer la solution de l'équation à 10^{-6} près.

Donner le nombre d'itérations nécessaires permettant de parvenir à la précision souhaitée pour chacun des algorithmes.